Geometría III

Examen V

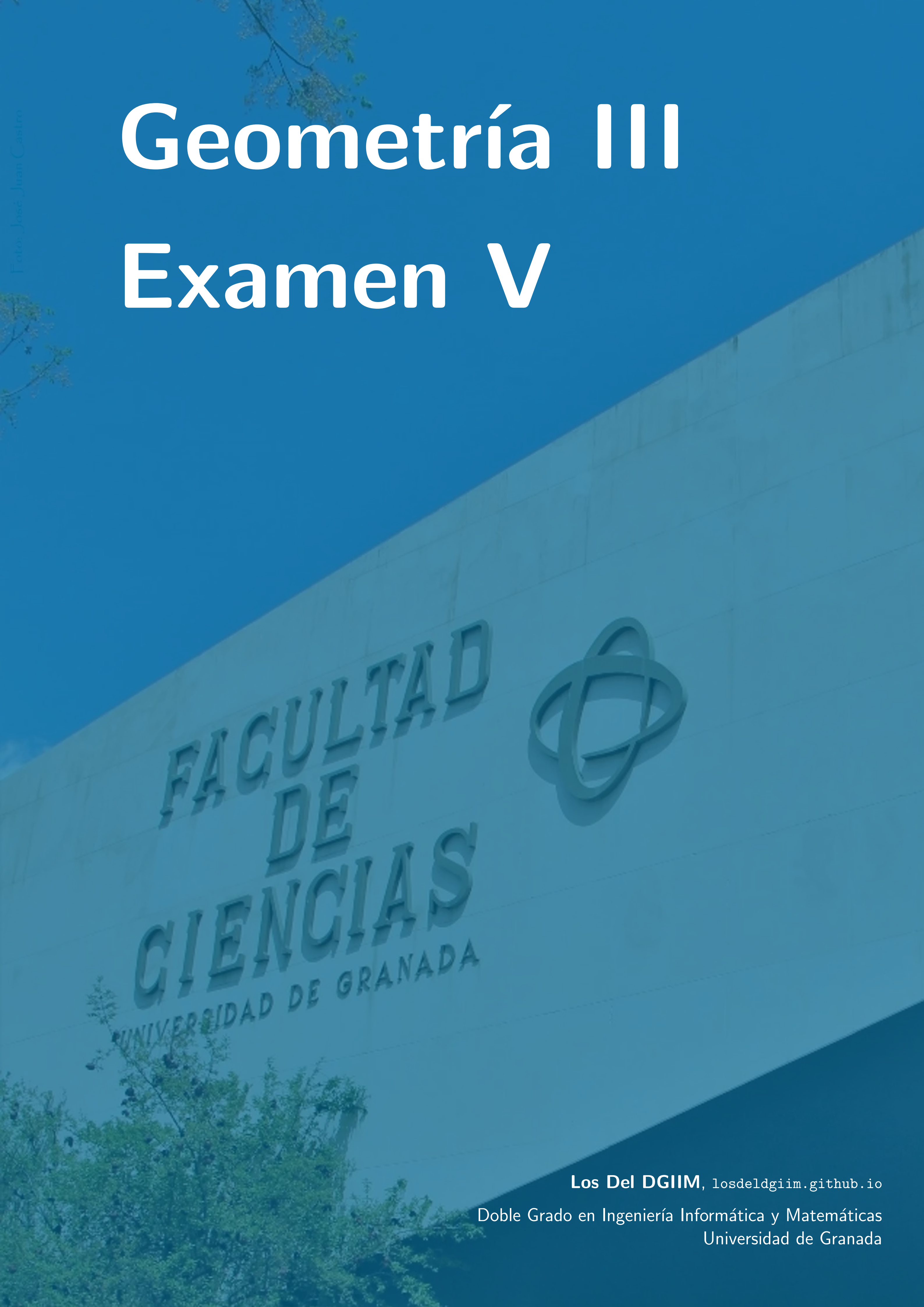

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.

Fecha 1 de diciembre de 2023.

Duración 90 minutos.

En lo que sigue, sustituye a y b por:

- $a = 1$ si la suma de los dígitos de tu DNI es par, $a = -1$ en caso contrario.
- $b = 1$ si el último dígito de tu DNI es par, $b = -1$ en caso contrario.

Ejercicio 1. Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$f(x) = p + \frac{1}{3}\left(a\overrightarrow{pq} + b\overrightarrow{px}\right)$$

¿Es f una afinidad?

Calculemos su lineal asociada. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{xy}) &= \overrightarrow{f(x)f(y)} = f(y) - f(x) = \\
&= p + \frac{1}{3}\left(a\overrightarrow{pq} + b\overrightarrow{py}\right) - p - \frac{1}{3}\left(a\overrightarrow{pq} + b\overrightarrow{px}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(b\overrightarrow{py} - b\overrightarrow{px}\right) = \frac{1}{3}b\overrightarrow{xy}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\overrightarrow{f} = \frac{b}{3}Id_{\mathbb{R}^2}$, por lo que f es una homotecia de razón $\frac{b}{3}$. Calculemos su punto fijo:

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\Longleftrightarrow p + \frac{1}{3}\left(a\overrightarrow{pq} + b\overrightarrow{px}\right) = x \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow a\overrightarrow{pq} + b\overrightarrow{px} = 3\overrightarrow{px} \Longleftrightarrow a\overrightarrow{pq} = (3-b)\overrightarrow{px} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x = p + \frac{a}{3-b}\overrightarrow{pq}
\end{aligned}$$

2. ¿Existe una afinidad $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, para todo x que no esté en la recta que pasa por p y q le hace corresponder el ortocentro del triángulo $\{p, q, x\}$?

   Observación. Se aconseja razonar cuál sería la imagen de los puntos de la circunferencia con diámetro $[p, q]$.

Ejercicio 2. Calcular la suma e intersección de los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
S &= \{(a, \lambda - a\mu, -2b\lambda, a\mu) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\
T &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a\}
\end{aligned}$$

¿Existe un subespacio afín de $\mathbb{R}^4$ paralelo a S y a T que pase por el punto $(0, a, 0, -a) \in \mathbb{R}^4$?

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación dada por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(ax + 2ay - 2az + b, 2ax - 2ay - az - 1, -2ax - ay - 2az + b\right)$$

¿Es f un movimiento rígido? En tal caso, clasifícalo.